

# Signali i sustavi - Zadaci za vježbu

## V. tjedan

1. Izračunajte Fourierov red vremenski diskretnog signala

$$x(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$

Odredite snagu signala.

### Rješenje:

Osnovni period signala je  $N_0 = 24$ , prema tome  $\Omega_0 = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$ .

Primjenom Eulerove formule

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2} \left( e^{\frac{j\pi}{3}n} + e^{-\frac{j\pi}{3}n} \right) + \frac{1}{2j} \left( e^{\frac{j\pi}{4}n} - e^{-\frac{j\pi}{4}n} \right) = \\ &= \frac{1}{2} e^{-j4\Omega_0 n} + j \frac{1}{2} e^{-j3\Omega_0 n} - j \frac{1}{2} e^{j3\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j4\Omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2} e^{j \cdot 20 \cdot \Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j \frac{\pi}{2}} e^{j \cdot 21 \cdot \Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{\pi}{2}} e^{j \cdot 3 \cdot \Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{j \cdot 4 \cdot \Omega_0 n} \end{aligned}$$

Prema tome  $X_3 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}}$ ,  $X_4 = \frac{1}{2}$ ,  $X_{20} = \frac{1}{2}$ ,  $X_{21} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{2}}$ .

Dobiveni spektar je diskretan i periodičan. Skicirajte amplitudnu i faznu karakteristiku.

Snaga signala je

$$P = \sum_{n=0}^{N-1} |X_k|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

2. Izračunajte vremenski diskretan Fourierov red periodičnog diskretnog signala, čija je jedna perioda definirana na sljedeći način:

$$x(n) = \begin{cases} n, & |n| \leq 3 \\ 0, & n \in \{4,5\} \end{cases}$$

Izračunajte snagu signala.

**Rješenje:**

Period zadanog signala je  $N=9$ .

Vremenski diskretan Fourierov red se računa prema formuli

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Za ovaj slučaj raspisujemo:

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^8 x(n) e^{-jk \frac{2\pi}{9} n} \\ &= \frac{1}{9} (0 + 1 \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{9} \cdot 1} + 2 \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{9} \cdot 2} + 3 \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{9} \cdot 3} + 0 \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{9} \cdot 4} \\ &\quad + 0 \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{9} \cdot 5} - 3 \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{9} \cdot 6} - 2 \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{9} \cdot 7} - 1 \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{9} \cdot 8}) \end{aligned}$$

Raspisujući sinuse i kosinuse, te koristeći svojstva:

$$\begin{aligned} \cos\left(k \frac{2\pi}{9}\right) &= \cos\left(k \frac{16\pi}{9}\right), \cos\left(k \frac{4\pi}{9}\right) = \cos\left(k \frac{14\pi}{9}\right), \cos\left(k \frac{6\pi}{9}\right) = \cos\left(k \frac{12\pi}{9}\right), \\ \sin\left(k \frac{2\pi}{9}\right) &= -\sin\left(k \frac{16\pi}{9}\right), \sin\left(k \frac{4\pi}{9}\right) = -\sin\left(k \frac{14\pi}{9}\right) \text{ i } \sin\left(k \frac{6\pi}{9}\right) = -\sin\left(k \frac{12\pi}{9}\right), \end{aligned}$$

dolazi se do rješenja:

$$X_k = -\frac{2j}{9} \left( \sin\left(\frac{2\pi k}{9}\right) + 2 \sin\left(\frac{4\pi k}{9}\right) + 3 \sin\left(\frac{6\pi k}{9}\right) \right).$$

Dobiveni spektar je diskretan i periodičan.

Njegovu snagu možemo naći u vremenskoj ili frekvencijskoj domeni koristeći Parsevalovu jednakost:

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2.$$

U ovom slučaju lakše je računati u vremenskoj domeni:

$$P = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^8 |x(n)|^2 = \frac{1}{9} (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2) = \frac{28}{9}.$$

3. Zadan je periodički vremenski kontinuiran signal

$$x(t) = 2 \cos(200\pi t) + 3 \cos(500\pi t).$$

Ako se dani signal očita s frekvencijom očitavanja  $F_s = 1 \text{ kHz}$ , nađite koeficijente Fourierovog reda dobivenog diskretnog signala. Odredite mu snagu.

**Rješenje:**

Ako je frekvencija očitavanja  $F_s = 1 \text{ kHz}$ , vrijeme očitavanja je onda  $T_s = \frac{1}{F_s} = 10^{-3} \text{ s}$ .

Očitani signal tada glasi:

$$x(nT_s) = 2 \cos(200\pi nT_s) + 3 \cos(500\pi nT_s) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) = x(n).$$

Ovako dobiveni signal je diskretan i periodičan. Period prvog dijela je  $\frac{\pi}{5}N_1 = 2k\pi \rightarrow N_1 = 10$ , a drugog dijela  $\frac{\pi}{2}N_2 = 2k\pi \rightarrow N_2 = 4$ . Najmanji zajednički višekratnik i ukupni period zadanog signala je  $N = 20$ . Zato se signal može napisati u obliku

$$x(n) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{20} \cdot 2n\right) + 3 \cos\left(\frac{2\pi}{20} \cdot 5n\right) = \frac{2}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{20} \cdot 2n} + e^{-j\frac{2\pi}{20} \cdot 2n} \right) + \frac{3}{2} \left( e^{j\frac{2\pi}{20} \cdot 5n} + e^{-j\frac{2\pi}{20} \cdot 5n} \right).$$

Koristeći svojstvo  $e^{-j\frac{2\pi}{20} \cdot 2n} = e^{j\frac{2\pi}{20} \cdot 18n}$  i  $e^{-j\frac{2\pi}{20} \cdot 5n} = e^{j\frac{2\pi}{20} \cdot 15n}$  (podsjetnik: pogledajte kutove u kompleksnoj ravni), signal možemo raspisati:

$$x(n) = e^{j\frac{2\pi}{20} \cdot 2n} + e^{j\frac{2\pi}{20} \cdot 18n} + \frac{3}{2} e^{j\frac{2\pi}{20} \cdot 5n} + \frac{3}{2} e^{j\frac{2\pi}{20} \cdot 15n}.$$

Formule za vremenski diskretan Fourierov red glase:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N} \cdot kn}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot kn}.$$

Gledajući gornji signal i formule, vidimo da je potrebno samo očitati koeficijente iz signala:

$$x(n) = \sum_{k=0}^{19} X_k e^{j\frac{2\pi}{20} \cdot kn}$$

Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} k = 2 &\rightarrow X_2 = 1 & k = 5 &\rightarrow X_5 = \frac{3}{2} \\ k = 18 &\rightarrow X_{18} = 1 & k = 15 &\rightarrow X_{15} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Za sve ostale  $k$  vrijednost Vremenski diskretnog Fourierovog reda je nula.

Dobiveni spektar je diskretan periodičan.

Snaga signala je  $P = \sum_{n=0}^{N-1} |X_k|^2 = (1)^2 + (1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{2}$ .

4. Nađite vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju diskretnog signala

$$x(n) = \begin{cases} n, & |n| \leq 3 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Izračunajte energiju signala.

**Rješenje:**

Zadani signal je diskretan aperiodičan. Njegov spektar će biti periodičan kontinuiran, a računa se prema formulama za vremenski diskretnu Fourierovu transformaciju:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$

Spektar zadanog signala dobivamo uvrštavanjem u formulu:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} = -3e^{j\Omega \cdot 3} - 2e^{j\Omega \cdot 2} - e^{j\Omega \cdot 1} + 0 \cdot e^{j\Omega \cdot 0} + e^{-j\Omega \cdot 1} + 2e^{-j\Omega \cdot 2} + 3e^{-j\Omega \cdot 3}$$

$$= 3(-\cos(3\Omega) - j\sin(3\Omega) + \cos(3\Omega) - j\sin(3\Omega))$$

$$+ 2(-\cos(2\Omega) - j\sin(2\Omega) + \cos(2\Omega) - j\sin(2\Omega))$$

$$+ 1(-\cos(\Omega) - j\sin(\Omega) + \cos(\Omega) - j\sin(\Omega))$$

$$= -2j(3\sin 3\Omega + 2\sin 2\Omega + \sin \Omega)$$

Totalna energija je dana preko Parsevalove relacije:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

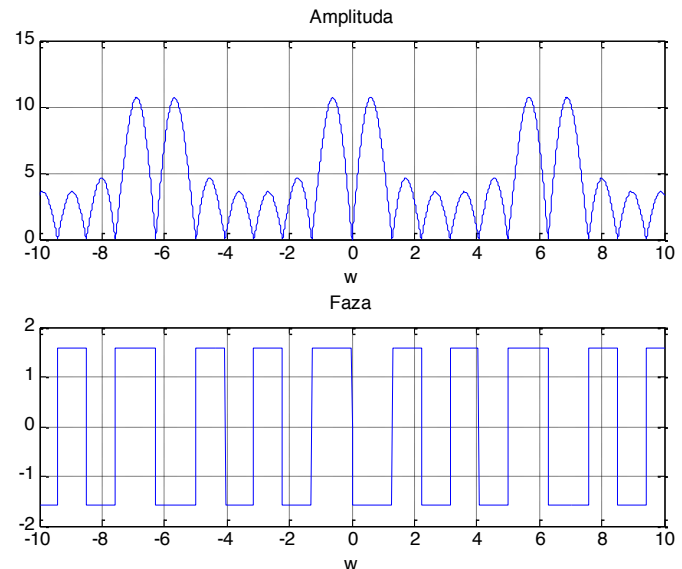
U vremenskoj domeni ona iznosi

$$E = \dots |0|^2 + |-3|^2 + |-2|^2 + |-1|^2 + 0^2 + |1|^2 + |2|^2 + |3|^2 + 0 + \dots = 28$$

U frekvencijskoj domeni totalna energija iznosi

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |-2j(3\sin 3\Omega + 2\sin 2\Omega + \sin \Omega)|^2 d\Omega$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (3\sin 3\Omega + 2\sin 2\Omega + \sin \Omega)^2 d\Omega = 28$$



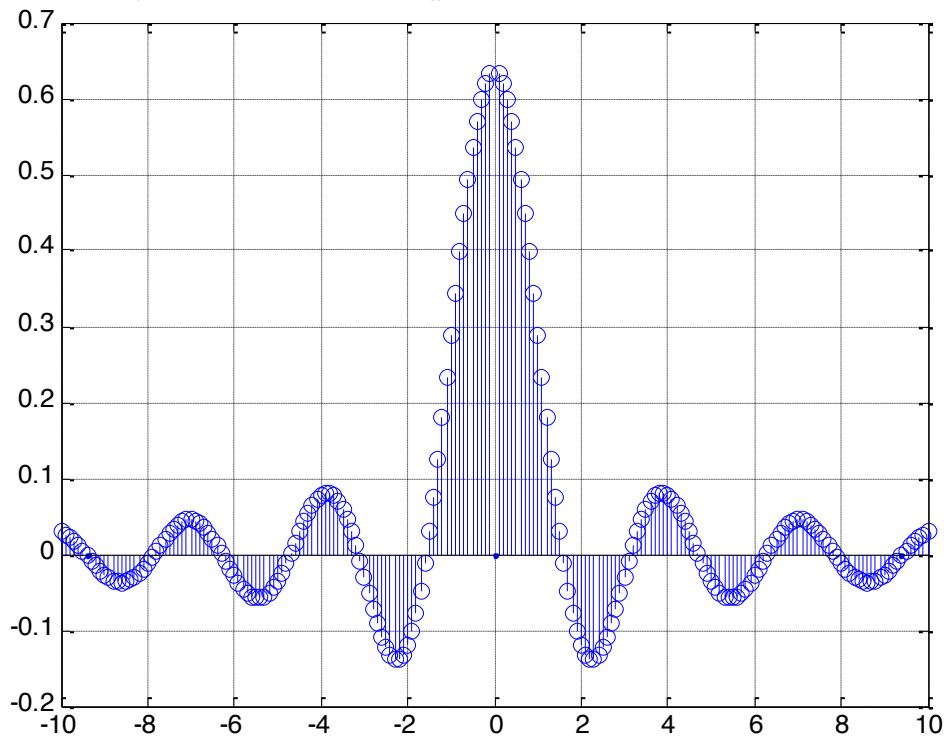
5. Zadan je spektar signala  $X(e^{j\Omega})$ . Nađite signal  $x(n)$ , te odredite energiju ovog signala.

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < w \\ 0, & w < |\Omega| < \pi. \end{cases}$$

**Rješenje:**

S obzirom da je zadan Fourierov spektar, za izračun signala u vremenskoj domeni, koristimo inverznu Fourierovu transformaciju:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w 1 \cdot e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{e^{j\Omega n}}{jn} \right|_{-w}^w = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{jwn} - e^{-jwn}}{jn} = \frac{\sin wn}{\pi n}.$$



Energija ovog signala se lakše nalazi u frekvencijskoj domeni:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w 1^2 d\Omega = \frac{w}{\pi}.$$